B.com - III

Paper-VIII - Business Statistics & Elementary mathematics

By, Sujeet Kr. Suman
D.N. College
(Hajipur)

* प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं से संबंधित कुछ श्रेणियाँ

(Some series Related to first n Natural Numbers)

प्रमेय- (i) प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योग

$$\Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$$ होता है।

अर्थात, $1+2+3+ \dots n = \frac{n(n+1)}{2}$

(ii) प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग

$$\Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ होता है।

अर्थात — $1^2+2^2+3^2+ \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग

$$\Sigma n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{6} \right\}$$ होता है।

अर्थात $1^3+2^3+3^3+ \dots + n^3 = \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\}^2$

(iv.) प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के चतुर्थ घातों का योग

$$\Sigma n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$ होता है।

अर्थात - $1^4+2^4+3^4+ \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

Ex. (1.) निम्न श्रेणी का n वाँ पद तथा n पदों तक योग ज्ञात करे?

$$1+3+6+10+ \dots$$

Sollution. श्रेणी को ध्यान से देखने पर यह ज्ञात होता है कि श्रेणी के पदों का अन्तर सा. श्रेणी में है अतः श्रेणी को निम्न प्रकार से लिख सकते है —

$$1+(1+2)+(1+2+3)(1+2+3+4)+ \dots$$

अतः n वाँ पद $T_n = 1+2+3+4+ \dots + n$ पदों तक

$$= \Sigma n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(n^2+n)$$

P.T.O

∴ n पदों का योग

$$S_n = \Sigma T_n = \Sigma\{\tfrac{1}{2}(n^2+n)\}$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}\Sigma n^2 + \tfrac{1}{2}\Sigma n$$

$$\Rightarrow \tfrac{1}{2}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \tfrac{1}{2}\,\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1)}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1+3)}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$ Ans.

Qn-2. Find out the sum of $1^2+2^2+3^2+ \dots n^2$.

Solution :—

The given series is $1^2+2^2+3^2+ \dots n^2$

Let its first term $a=1$ and c.d. $=1$

$$\therefore t_n = \{1+(n-1)1\}^2$$

$$\Rightarrow \{1+n-1\}^2 = n^2$$

$$\therefore S_n = \Sigma n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Qn-3 → निम्नलिखित श्रेणी का n वाँ पद तथा n पदों का योग ज्ञात करो:-

$$1.2 + 3.4 + 5.6 + 7.8 + \dots$$

Solution

श्रेणी का n वाँ पद = (1, 3, 5, 7, ... का n वाँ पद) × (2, 4, 6, 8 ... का n वाँ पद)

$$\Rightarrow T_n = \{1+(n-1)\times 2\}\times\{2+(n-1)\times 2\}$$

$$\Rightarrow (2n-1)\times 2n = 4n^2 - 2n$$

$$\Rightarrow S_n = \Sigma T_n = \Sigma(4n^2-2n) = 4\Sigma n^2 - 2\Sigma n$$

$$\Rightarrow S_n = 4\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{2n(n+1)}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} - n(n+1)$$

$$\Rightarrow \frac{2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{n(n+1)\{2(2n+1)-3\}}{3} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{3}$$